Ministère de l'Enseignement Supérieur,
et de la Recherche Scientifique

Université de Gabès

ole Nationale d Ingénieurs de Gabés

FEUILLE D'EXAMEN

Identifiant secret

Epreuve de .....
Session : .....
Année / Diplôme : .....

m : .....
nom .....
ntifiant (CIN) : .....
ie / Salle N° : .....

Signatures des surveillants	Numéro de la feuille double
	Total des feuilles doubles remises

F : fct de répartition de X
et f sa fct de densité

NB (avec remise : indépendant

Identifiant secret

Epreuve de Revision générale

Numéro de la feuille double	Total des feuilles doubles remises

et pas important

ote attribuée

Signatures s correcteurs

I * Loi discrète : → Tableau des Probabilités
- Loi de Probabilité ⇔ Fonction de répartition

II * Loi Continue : → Fonction de répartition
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
(+ leurs propriétés (E(X), V(X)...

III * Echantillonnage :

- moyenne empirique :

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

(ses propriétés)

- Variance empirique :

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$$E(S_n^2) = \frac{n-1}{n} V$$

$E(\overline{X}) = m$ et $Var(\overline{X}) = \frac{V(X)}{n}$

- Critère de C.V en proba :

$E(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $V(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\Rightarrow X_n \xrightarrow{P_n} a$

CamScanner

NE RIEN ECRIRE ICI

* Loi des grands nombres :

* X v.a tq. $E(X) = m$ existe (finie)

$\Rightarrow \forall (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de v.a. 2à2 indépendantes et de même loi que X, la suite des V.a. :

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n \to +\infty]{P.} E(X) = m$$

* Convergence en moyenne quadratique :

. Critère de convergence en m.q :

si (X_n) est une suite de V.a vérifie

$\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = a$ et $\lim_{n \to +\infty} V(X_n) = 0$

$\Rightarrow (X_n)$ C.V en m.q vers a.

C.V en m.q $\Rightarrow$ C.V en p

$\Downarrow$

C.V en loi

. Convergence en loi de la moyenne empirique :

* T.C.L :

Si X v.a de loi quelconque tq $E(X^2)$ existe et si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite infinie de v.a. indépendantes et de même loi que X, alors la suite des V.a.

$$U_n = \frac{\overline{X}_n - m}{\sigma / \sqrt{n}}, \text{ où } \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$m = E(X)$; $\sigma^2 = V(X)$

Convergence en loi vers la loi $N(0,1)$ quand $n \to \infty$

En pratique
si la taille de l'échantillon est suffisamment grande ($n \geq 50$)

TCL $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

où $m = E(X)$; $\sigma^2 = V(X)$

* Convergence de loi Binomiale vers la loi Normale :

T-R de Moivre Laplace :

(X_n) une suite de v.a de la loi Binomiale $B(n,p)$

alors quand $n \to \infty$ la suite de v.a $\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\text{loi}} N(0,1)$

En pratique

pour n assez grand, $B(n,p) \rightsquigarrow N(np, \sqrt{np(1-p)})$

* Seconde version du T.C.L : (Théorème central limite)

En pratique :

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes, toutes de même loi

$E(X_n) = m$, $V(X_n) = \sigma^2$

$\Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow$ approx $N(nm, \sigma\sqrt{n})$ (pour n assez grand)

* Petits échantillons issus d'une loi normale

* Proposition :

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des v.a indépendantes de lois respectives $N(m_i, \sigma_i)$, i variant de 1 à n alors la v.a $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ $\rightsquigarrow$ la loi Normale d'espérance $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ et l'écart-type $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2}$

∀ la loi $\Rightarrow$ n'importe quelle loi

* Corollaire :

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ est un n-échantillon de la v.a. X de la loi $N(m, \sigma)$ $\Rightarrow$ La moyenne empirique $\overline{X}_n \rightsquigarrow N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

∀ la taille $\Rightarrow$ n'importe quelle taille.

IV Estimation :

* Définition :

- l'estimateur T_n est dit sans biais si $E(T_n) = \theta$ $\forall n$
- on appelle biais de l'estimateur T_n la quantité $b_n = E(T_n) - \theta$
- L'estimateur T_n est dit asymptotiquement sans biais si $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$; i.e $\lim_{n \to +\infty} E(T_n) = \theta$

* moyenne empirique :

$T_n = \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est un estimateur sans biais du paramètre $m = E(X)$

* Variance empirique corrigée :

• $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de σ^2.

• $S'^2_n = \frac{n}{n-1} S_n^2$ est un estimateur sans biais de la variance. Propriété δ^2

Proposition : $\rightarrow (E(S'^2_n) = V)$

un estimateur T_n du paramètre θ est C.V en m.q SSi il est sans biais ou asymptotiquement sans biais et si sa variance tend vers 0 quand $n \to +\infty$

* Comparaison d'estimateurs : / important

• si T_n et U_n sont deux estimateurs sans biais pour θ et si : $V(T_n) < V(U_n) \Rightarrow T_n$ est meilleur que U_n

• L'un au moins est biaisé :

si e.q.m $(T_n) <$ e.q.m $(U_n) \Rightarrow T_n$ est meilleur que U_n où e.q.m$(T_n) = E((T_n - \theta)^2)$ et eqm$(U_n) = E((U_n - \theta)^2)$

espérance quadratique en moyenne

* Construction d'estimateurs :

• Méthode des moments :

Si $E(X) = f(\theta)$, où f est une fct bijective sur $\mathbb{R}$, donc inversible alors on prend pour estimateur de θ, la statistique $T_n = f^{-1}(\bar{X})$

• Méthode du M.V : (maximum vraisemblance)

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de la V.a. X dont la loi dépend du paramètre inconnu θ. on appelle Vraisemblance de θ, étant donné les observations $(x_1, \ldots, x_n)$ le nombre :

M.V ⚠ → $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \ldots f(x_n, \theta)$

La fonction $\theta \longrightarrow L(x_1, \ldots, x_n)$ est appelée fonction de Vraisemblance de

La méthode en Pratique :

⚠ → $\theta \longrightarrow Ln(L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)) = \sum_{i=1} Ln(f(x_i, \theta))$

* C.N : $\frac{\partial Ln(L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta))}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \theta = \hat{\theta}$

* C.S : $\frac{\partial^2 Ln(L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta))}{\partial \theta^2} < 0$

L'estimateur du M.V est alors la v.a. $W_n = \hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

CamScanner

Estimation

- si $E(T_n) = \theta \ \forall n \Rightarrow T_n$ est dit sans biais
- si $\lim_{n \to +\infty} E(T_n) = \theta \Rightarrow T_n$ est asymptotiquement sans biais

↑ ($b_n = E(T_n) - \theta$ dit biais de l'estimateur T_n)

$\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$

- moyenne empirique :

$T_n = \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$: estimateur sans biais du paramètre $E(X) = m$

- Variance empirique corrigée :

- $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$: estimateur asy. sans biais de paramètre σ^2

- $S'^2_n = \frac{n}{n-1} S_n^2$: estimateur sans biais de la variance théorique σ^2

$E(S'^2_n) = V$

- Proposition :

* T_n : estimateur de paramètre θ est C.V en m.q ssi :
  - il est sans biais ou asy. sans biais
  - sa variance tend vers 0 quand $n \to +\infty$

- Comparaison d'estimateurs :

- si T_n et U_n sont 2 estimateurs sans biais pour θ,

↳ si $V(T_n) < V(U_n) \Rightarrow T_n$ est meilleur que U_n

* L'un au moins est biaisé :

e.q.m $(T_n) = E((T_n - \theta)^2)$

- si e.q.m $(T_n) <$ e.q.m $(U_n) \Rightarrow T_n$ est meilleur que U_n

espérance en m.q

- Construction d'estimateurs :

- Méthode des moments :

- si $E(X) = f(\theta)$
- f est bijective sur $\mathbb{R} \Rightarrow$ inversible $\Rightarrow$ on prend $T_n = f^{-1}(\overline{X})$ pour l'estimateur de θ

- Méthode M.V : (Maximum de vraisemblance)

- $(X_1, \dots, X_n)$ n-échantillon de la V.a X dont la loi dépend du param. inconnu θ.

on appelle vraisemblance de θ :

$L(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) = f(X_1, \theta) f(X_2, \theta) \dots f(X_n, \theta)$

$\theta \longmapsto L(X_1, \dots, X_n)$: fct de vraisemblance de θ

CamScanner

En Pratique

$$\theta \longrightarrow Ln\left(L(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta)\right) = \sum_{i=1}^{n} Ln\left(f(X_i, \theta)\right)$$

• C.N :

$$\frac{\partial Ln\left(L(X_1, \dots, X_n, \theta)\right)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \theta = \hat{\theta}$$

• C.S :

$$\frac{\partial^2 Ln}{\partial \theta^2}\left(L(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)\right) < 0$$

L'estimateur du M.V est alors la v.a :

$$W_n = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$$

Echantillonnage

• Moyenne empirique :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

• Variance empirique :

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2$$

ou bien $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

- $E(\overline{X}) = m$
- $V(\overline{X}) = \frac{V(X)}{n}$
- $E(S_n^2) = \frac{n-1}{n} V$

• Critère de C.V en proba :

$$\left.\begin{array}{l} E(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ V(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow X_n \xrightarrow{P_r} a$$

• Loi des grands nombres (LGN) :

- X v.a tq $E(X) = m$ existe (finie)

$\Rightarrow \forall (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de v.a. 2 à 2 indép. et de même loi de X ;

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to+\infty]{P_r.} E(X) = m$$

(1)

• Convergence en m.q. (moyenne quadratique) :

• Critère de C.V. en m.q :

si (X_n) suite de v.a vérifie :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim_{n\to+\infty} E(X_n) = a \\ \text{et} \\ \bullet \lim_{n\to+\infty} V(X_n) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (X_n) \text{ C.V en m.q vers } a.$$

• Convergence en loi de la moyenne empirique :

• T.C.L : (Théorème Central Limite)

X v.a de loi qcq tq $E(X^2)$ existe

et si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\left\{\begin{array}{l} \bullet \text{ suite infinie de v.a indép en loi} \\ \bullet \text{ de même loi que } X \end{array}\right.$

$$\Rightarrow U_n = \frac{\overline{X_n} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{où } \overline{X_n} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$\forall\, m = E(X_n)$

$\sigma^2 = V(X)$

$\Rightarrow$ Convergence en loi vers loi $N(0,1)$ quand $n \to +\infty$

En pratique :

- si la taille de l'échantillon est suffisamment grande ($n \geq 50$) :

T.C.L

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

où $m = E(X)$; $\sigma^2 = V(X)$

C.V en m.q $\Rightarrow$ C.V en pr $\Rightarrow$ C.V en loi

- Convergence de loi Binomiale vers la loi Normale :

Th de Moivre Laplace :

Variance $= np(1-p)$
espérance $= np$

$(X_n) \rightsquigarrow B(n,p)$ loi binomiale

$\Rightarrow$ quand $n \to +\infty$: $\dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\text{loi}} N(0,1)$

En Pratique :

- si assez grand, $B(n,p) \rightsquigarrow N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$

- 2ème version du T.C.L :

En Pratique :

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des v.a. indépendants
- toutes de même loi

$\Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi Normale $N(nm, \sigma\sqrt{n})$ (2)

* Petits échantillons issus d'une loi Normale :

Proposition :

- $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a indépendantes de lois respectives $N(m_i, \sigma_i)$
- i variant de 1 à n

$\Rightarrow$ $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n \rightsquigarrow$ la loi Normale d'espérance $m = m_1 + \dots + m_n$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}$

Corollaire :

- $(X_1, \dots, X_n)$ est un n-échantillon de la v.a X de la loi Normale $N(m, \sigma)$

$\Rightarrow$ La moyenne empirique $\bar{X}_n \rightsquigarrow N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

* **Population** : (noté Ω) ; Ensemble sur lequel porte notre étude statistique.

Ensemble des étudiant de section 1.
↳ on s'intéresse au nbre de frère et sœurs de chaque étudiant

Ω = Ensemble des Etudiants/Personne/choses...

* **Individu (unité statistique)** (noté ω) tout élt de la population Ω (ω dans Ω)

* **Caractère (variable statistique)** (noté V.S) tout app $X : \Omega \to S$

C : Ensemble des valeurs de caractères X

exp taille, température, couleur des yeux, groupe sanguin...

Rq $N = \text{card}(\Omega)$ nbre d'élt de Ω

* **Modalités** : Ce sont les différentes de valeurs

Exp : ① v. situation familiale
↳ Modalités sont : Célibataire, divorcés, mariés
② v. statistique d'interrupteurs
↳ Modalité sont '0, 1'

* **Caractères qualitatif**

Il faut que les modalités ne peuvent pas être ordonnée. (c-à-d : si l'on a 2 caractères qui paraît, on ne peut pas dire que l'un des caractères est < à l'autre.

Caractère quantitatif

Il faut que les modalités puissent être ordonnée.
(l'âge, durée de vie, salaire d'un individu...) ①

exp : Etat du maison :
les modalités :
ancienne - dégradé - neuve ...

types de ces caractères : discret / continue

exp : ① Salaire d'employer :
modalité : 2000, 3000
Type : Discret
② La rugosité des vêtements :
modalités : $[10, 20]$ N/m
Type : continue

V.S. discrètes

↳ prendre nbre fini ou dénombrable de valeurs (nbre d'enfant, nbre de caisse ...)

$X : \Omega \longrightarrow \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$N = \text{card}(\Omega)$

Effectif Partiel

Etudie SSI un caractère statistique numérique représenté par une suite (x_i) décimal par valeur de caractère avec $x \in [\![1 \dots K]\!]$

• pour chaque valeur de x_i :

$n_i = \text{card}\{\omega \in \Omega : x(\omega) = x_i\}$

Effectif Cumulé n_i

pour chaque valeur de x_i :

$N_i = n_0 + \dots + n_i$

exp : 50 : nbre de famille ayant i d'enfant $\geq$ à 1

x_i	1
N_i	50

Effectif total :

$N = \text{card}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

Effectif Partiel: $n_i = \text{Card}\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}$

Effectif cumulée n_i: $N_i = n_0 + \dots + n_i$

Effectif total: $N = \text{Card}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

Fréquence Partiel: Pour chaque x_i $f_i = \frac{n_i}{N}$

$f_i \leftrightarrow f_i \times 100$ (pourcentage)

f_i est le pourcentage de ω $X(\omega) = x_i$

$\sum_{i=1}^{n} f_i = 1$

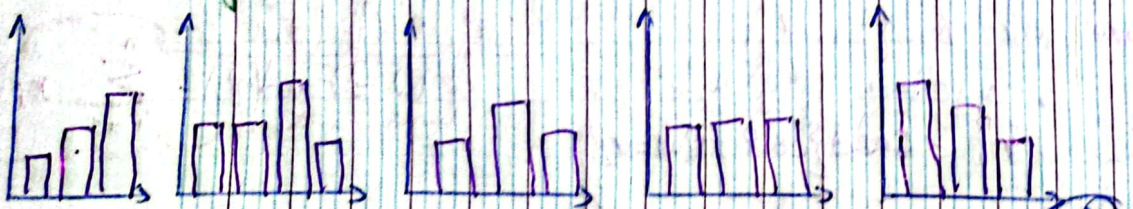
Fréquence Cumulée: Pour chaque x_i $F_i = f_1 + \dots + f_i$

Pourcentage de ω tq $X(\omega) \leq x_i$

Représentation graphique des séries statistiques:

- qualitative ou quantitative
- Tableaux (graphes) et les diagrammes

↳ la synthèse; la découverte, l'exactitude, la recherche des régularités.



* Distrib. à caract. qualitatif • Tuyaux d'orgues (Diag en bande)

Diag de chaque modalité ou effectif

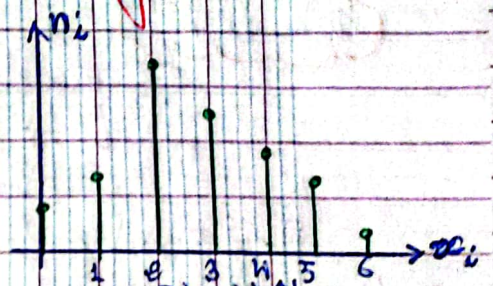
Tuyaux d'orgue — modalités

• Diag. pour secteurs (Diag circulaires)



* Distrib. à caract. quantitatif discret:

• Diag. à bâtons:



Diag à bâtons

Règle de trois $\theta_i = \frac{n_i \times 360}{N}$

$N \rightarrow 360°$

$n_i \rightarrow \theta_i$ (degré de modalité)

* Représentations sous forme de Courbe et fct de répartition:

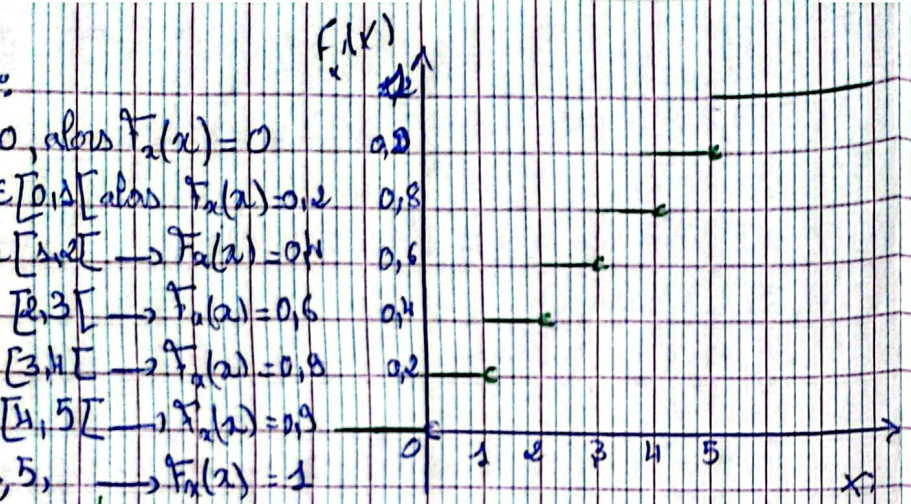
$F_x : \mathbb{R} \longrightarrow [0;1]$ Pourcentage des individus dont la valeur de caractère $\leq x$

↳ Fonction de répartition du caractère x.

Rq:

- $i \in \{1, \dots, n\} \longrightarrow F_x(x_i) = F_i$
- la courbe de F_x passe par les pts: $(x_1, F_1) \dots$ et (x_n, F_n)
- $\mathbb{R} =]-\infty, 0[\cup [0, 1[\cup \dots \cup [6, +\infty[$

• Exp :
• si $x<0$, alors $F_x(x)=0$
• si $x\in[0,1[$ alors $F_x(x)=0,2$
• si $x\in[1,2[$ $\longrightarrow F_x(x)=0,4$
• si $x\in[2,3[$ $\longrightarrow F_x(x)=0,6$
• si $x\in[3,4[$ $\longrightarrow F_x(x)=0,8$
• si $x\in[4,5[$ $\longrightarrow F_x(x)=0,9$
• si $x\geq 5$, $\longrightarrow F_x(x)=1$



Proposition :

$i\in\{1,\dots,n\}$: l'égalité : $F_x(x_i)=F_i$

l'expression : $F_x(x_i)=\begin{cases} 0 & ; \text{si } x<x_1 \\ F_1 & ; \text{si } x_1\leq x<x_2 \\ F_i & ; \text{si } x_i\leq x\leq x_{i+1} \\ 1 & ; \text{si } x\geq x_n \end{cases}$

• **Le mode** est la valeur qui a le plus grand effectif partiel (pour la plus grande fréquence partielle) noté M_o

R : on peut avoir plus d'un mode ou rien

• **La médiane** : M_e de la variable statistique qui vérifie : $F_x(M_e^-)<0,5\leq F_x(M_e^+)=F_x(M_e)$

Exp :
• $F_x(0^-)=0<0,5\not\leq F_x(0^+)=0,09$
↳ n'est pas satisfait donc la médiane est $\neq 0$
• $F_x(2^-)=0,25<0,5\leq F_x(2^+)=0,58$
↳ $M_e=2$

• **La moyenne :**
$N=\text{card}(\Omega)$

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i=\sum_{i=1}^{n} f_i x_i$$

• **Etendue de la variable statistique X :** $e=x_{max}-x_{min}$

• **La variance :**

$$\text{Var}(X)=\sum_{i=1}^{n} f_i(\bar{x}-x_i)^2$$

Théorème (König Huygens)

(x_i,n_i) Série statistique de moyenne $\bar{x}$ et variance $\text{Var}(X)$

$$\Longrightarrow \text{Var}(X)=\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2-\bar{x}^2$$

Dém : (par • $\sum_{i=1}^{n} f_i=1$ et • $\sum_{i=1}^{n} f_i x_i=\bar{x}$)

• **L'écart-type :** (de V.S. X)

$$\sigma_X=\sqrt{\text{Var}(X)}$$

σ_X mesure la distance moyenne entre $\bar{X}$ et X

• σ_X petit — Série homogène
• σ_X grand — Série hétérogène

n_i	→ eff. Partiel
x_i	→ Modalité
f_i	→ freq. Partiel
N_i	→ effectif cummulé
F_i	→ freq cummulé.

⊛ Cherche de M_o : Cherche x_i qui à la plus grande valeur de n_i

⊛ Cherche de M_e : Cherche x_i qui verifie $F_i(M_e^-) < 0,5 \leq F_i(M_e^+)$

* Algèbre d'evenement :

$\mathcal{A}$ algèbre d'evenement si :

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- si $A \in \mathcal{A} \longrightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$
- si $(A_i)_{i \in I}$ ($I \subset \mathbb{N}$, I fini) est une famille d'evenements alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$

- si $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow$ A et B sont incompatible

* Fonction de Probabilité :

- $P(\Omega) = 1$
- $(A_i)_{i \in I}$ deux à deux incompatibles : $P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$

(+) $P(\emptyset) = 0$

(+) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

(+) si $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$

(+) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(+) si $(A_i)_{i \in I}$ f.q : $P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} P(A_i)$

(+) si $(B_i)_{i \in I}$ forme un sys complet d'evenement (à 2 à 2 compatible) $P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap B_i)$ (1)

* Probabilité conditionnelle :

- $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ tq $P(B) \neq P(A)$
- A et B indépendant ssi $P(A/B) = P(A)$ ssi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

* La fonction de Probabilité :

$P(S = s) = P(\{\omega / S(\omega) = s\})$

$P_X(T) = P(\{\omega / X(\omega) \in T\})$ noté P

* La loi discrét $\longrightarrow$ Tableau $(x_i, p_i)_{i \in I}$ avec $p_i \geq 0$, $\sum_{i \in I} p_i = 1$

* Fonction de répartition :

$F(x) = P(X \leq x)$

- F est à valeurs dans $[0;1]$
- $F(-\infty) = 0$
- $F(+\infty) = 1$
- F est une fct $\nearrow$
- F est continue PP (sauf eventuellement en un nbre fini de pts)

pour X est un v.a de la loi discrete $(x_i, p_i)_{i \in I}$

Alors $F_i = F(x_i) = \sum_{k=1}^{i} p_k$

- si $x_i \leq x < x_{i+1}$ $F(x) = F(x_i) = F_i$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \sum_{a < x_i \leq b}$

variable indépendante :

- X et Y sont indépendant SSi $P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i)P(Y=y_j)$

2 v.a discrètes $(y_j ; q_j)_{j \in J}$ et $(x_i, p_i)_{i \in I}$

Espérance : $E(X) = \sum_{i \in I} x_i p_i$

Variance : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

si pour $(x_i, p_i)_{i \in I}$ $V(X) = \sum_{i \in I} (x_i - E(X))^2 p_i$

$V(X) = \sum_{i \in I} x_i^2 p_i - [E(X)]^2$

Ecart type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

- $E(a) = a$
- $E(aX) = a E(X)$
- $E(X+a) = E(X) + a$
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

$P(M = K) = P(M > K-1) - P(M > K)$

$\left(F(K) = \frac{1+K}{n}\right)$ L. Uniforme

- $V(aX) = a^2 V(X)$
- $V(X+a) = V(X)$
- $V(aX+bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2ab\,cov(X,Y)$

si X et Y sont indép : $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

- $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)$

où $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Loi	Valeurs	Probabilité	Espérance	Variance
uniforme discrète $\mathcal{U}\{1,\dots,n\}$	$\{1,\dots,n\}$	$P(X=k) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli de Paramètre p	$\{0,1\}$	$P(X=1) = p$ $P(X=0) = q$	p	pq
Binomial $B(n,p)$	$\{0,1,\dots,n\}$	$P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $q = 1-p$	np	npq
géométrique $g(p)$	$\mathbb{N}^*$	$P(X=k) = p q^{k-1}$ où $q = 1-p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
poisson $P(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

$p \in [0,1]$, $q = p-1$

Lois Continue :

* La fct de répartition : $F(x) = P(X \leq a)$:
  - F app définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0,1]$
  - $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ ($F(-\infty)=0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$, $F(+\infty)=1$)
  - F est ↗
  - F est continue
  - F est dérivable p.p
- on note $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ — $f(t)$: densité de Prob.
  - $f \geq 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 1$

  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$
- densité de Probabilité $\begin{cases} * & f(x) \geq 0 \\ * & \int \text{ est continue p.p} \\ * & \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \end{cases}$
- Pour une v.a. continue : $\forall a \in X(\Omega)$: $P(X=a)=0$
- Probabilité d'un intervalle :
  - $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(u)\,du$
  - Rq : $P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$

* Moment d'une V.a Continue :
  - Espérance $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$
  - Variance $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - [E(X)]^2$

    $= E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - (E(X))^2$
  - Ssi $V(X) \geq 0$
  - moment centrée d'ordre k : $\mu_k = E\left((X - E(X))^k\right)$

    $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = V(X)$
  - moment non centrée d'ordre k : $m_k = E(X^k)$

    $m_1 = E(X)$; $m_2 = \mu_2 + m_1^2$

* Soit $Y = \varphi(X)$
  - Si φ monotone ↗ :

    Si φ est inversible φ^{-1} ↗ $\Rightarrow G(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq \varphi^{-1}(y)) = F[\varphi^{-1}(y)]$
  - Si φ monotone ↘ :

    Si φ est inversible et φ^{-1} ↘ $\Rightarrow G(y) = P(Y \leq y) = P(X \geq \varphi^{-1}(y)) = 1 - F[\varphi^{-1}(y)]$

Si X continue

$Y = \varphi(X)$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, g(y)\, dy \qquad E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\, dx$$

Indépendance de 2 variables continues :

- couple (X,Y) appartient à $\mathbb{R}^2$

X et Y sont indépendantes ssi la loi de couple (X,Y) vérifie :

$$H(x,y) = P(X<x, Y<y) = F(x)\,G(y) \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$\hookrightarrow h(x,y) = f(x)\,g(y)$$

Rq : X_1 et X_2 2 v.a. indépendantes de L.N resp. $N(m_1, \sigma_1)$ et $N(m_2, \sigma_2)$

- $aX_1 \rightsquigarrow N(am_1, |a|\sigma_1)$
- $X_1 + a \rightsquigarrow N(m_1 + a, \sigma_1)$
- $X_1 + X_2 \rightsquigarrow N(m_1+m_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$

$aX_1 + bX_1 \quad N(am_1+bm_2, \sqrt{a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2})$

Loi	valeurs P	Densités	Espérance	variance
uniforme $\mathcal{U}([a,b])$	$[a;b]$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x\in[a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$	$[a;+\infty[$	$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Loi Normale $N(0,1)$	$\mathbb{R}$	$\forall x\in\mathbb{R}$ $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$	0	1
Loi Normale $N(m,\sigma)$ $m\in\mathbb{R}, \sigma\in\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\forall x\in\mathbb{R}$ $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	m	σ^2

Rq : (Symétrique)

- $F_0(0) = 0,5$
- $F_0(-t) = 1 - F_0(t)$, $\forall t\in\mathbb{R}$
- $P(|T|<t) = P(T<t) - P(T<-t)$
  $= 2F_0(t) - 1 \quad t\in\mathbb{R}$
- $P(|T|\geq t) + P(T<-t) = 2(1-F_0(t)), t\in\mathbb{R}$

loi normale $N(m,\sigma)$ — T suit loi $N(0,1)$

X suit la loi $N(m,\sigma)$ ssi $X = \sigma T + m$

X suit la loi $N(m,\sigma)$ ssi $T = \frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $N(0,1)$

Loi de Khi-Deux:

* $T_1, \dots, T_n$ des v.a de loi $N(0,1)$ indépendant

Alors $X_n = T_1^2 + T_2^2 + \dots + T_n^2 \rightsquigarrow$ la loi de Khi-Deux de paramètre n et on note $X_n = \chi^2_n$

↳ appelé nombre de degrés de libertés de la loi χ^2

$E(X_n) = n \qquad V(X_n) = 2n$

* La somme de 2 v.a. indep. qui suivent la loi χ^2 resp. à n_1 et n_2 degré de liberté suit la loi $\chi^2_{n_1+n_2}$

* Si n très grand $(n \geq 100)$; $\chi^2_n \rightsquigarrow N(n, 2n)$

* pour $n \geq 30$:

• Z_n v.a de loi χ^2_n ; si $n \longrightarrow \infty$; $\sqrt{2Z_n} - \sqrt{2n-1}$ tend en loi vers la loi $N(0,1)$

Loi de Student:

U v.a $\rightsquigarrow N(0,1)$
X v.a indep de U de χ^2_n
$\Big\} T = \dfrac{U}{\sqrt{X/n}}$ suit la loi de Student à n degrés de liberté

* loi de T est symétrique donc $E(T) = 0$

• si F désigne sa fct de répartition ; on a:

$$F(-t) = 1 - F(t)$$

• pour $n \geq 50$: on peut approcher la loi de T par une loi normale $N(0,1)$